Università degli Studi di Padova
Facoltà di Psicologia,
L4, Psicometria, Modulo B

Algebra delle sommatorie

Dr. Marco Vicentini
marco.vicentini@unipd.it

Anno Accademico 2010 – 2011
Rev 30/03/2011

Che cos'è una variabile?

Dato che i dati psicologici sono solitamente costituiti da insiemi molto grandi di osservazioni, è necessario utilizzare una *notazione* che consenta di manipolare facilmente queste grandi masse di dati.

Algebra delle sommatorie

Consideriamo il seguente insieme di coppie caso–modalità assunta su una generica variabile, ovvero, la distribuzione sulla proprietà X:

ref_1	3
ref_2	7
ref_3	1
ref_4	9
ref_5	2

Algebra delle sommatorie

Usiamo l'indice *i* per fare riferimento ai diversi referenti, ovvero alle righe della matrice C × V.

Il valore assunto dalla variabile *X* nel caso di una generica osservazione viene dunque indicato con X_i.

Distribuzione di una variabile

Quando l'indice *i* assume il valore *2, 3, o 5*, questo significa che facciamo riferimento al valore assunto da *X* nel caso della seconda, terza o quinta osservazione (ovvero, riga della matrice C × V).

ref_1	3
ref_2	7
ref_3	1
ref_4	9
ref_5	2

$X_2 = 7$

$X_3 = 1$

$X_5 = 2$

Simbolo di sommatoria

Un simbolo di cui viene fatto un grande uso nella statistica è quello di sommatoria:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$$

Esempio

Nel caso della distribuzione precedente

{3, 7, 1, 9, 2}, la somma sarà:

$$\sum_{i=1}^{5} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$$

$$= 3 + 7 + 1 + 9 + 2 = 22$$

Notazione

Quando non ci sono ambiguità (la sommatoria riguarda tutti i casi della distribuzione), la notazione precedente può essere semplificata nel modo seguente:

$$\sum_i X_i \quad \text{oppure} \quad \sum X_i$$

Osservazioni suddivise in gruppi

Talvolta, le osservazioni sono suddivise in gruppi.

Assumiamo, per esempio che vi siano 10 studenti nella prima aula, 8 studenti nella seconda aula e 12 studenti nella terza aula.

Per distinguere queste osservazioni abbiamo bisogno di **due indici**, uno per gli studenti e uno per le aule. Sia *i* l'indice per gli studenti e *j* l'indice per le aule. Quindi l'indice *i* va da 1 a 10 e l'indice *j* va da 1 a 3.

Osservazioni suddivise in gruppi

Ciascuno studente sarà dunque identificato da due indici: X_{ij}.

Se usiamo la convenzione per cui l'indice *i* (studenti) precede l'indice *j* (aule), allora X_{73} indica il settimo studente nella terza aula.

Osservazioni suddivise in gruppi

Spesso accade che vogliamo sommare i punteggi di tutti gli individui in tutti i gruppi. Per fare questo usiamo la seguente notazione:

$$\sum_{j=1}^{J} \sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}$$

Osservazioni suddivise in gruppi

Nel caso dell'esempio precedente avremo:

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{N_j} X_{ij} = X_{1,1} + X_{2,1} + \ldots + X_{12,3}$$

Regola 1

Consideriamo il caso in cui tutte le osservazioni della distribuzione hanno lo stesso valore.

Se *a* è una costante, allora

$$\sum_{i=1}^{N} a = N \cdot a$$

Esempio

Se $a = 10$, allora la sommatoria da 1 a N di a (con $N = 5$) è

$$\sum_{i=1}^{5} 10 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10$$

$$= 5 \times 10 = 50$$

Regola 2

Se ciascuna delle osservazioni che entrano in una sommatoria viene moltiplicata per la costante *a*, allora

$$\sum_{i=1}^{N} a \cdot X_i = a \sum_{i=1}^{N} X_i$$

Esempio

La variabile X assume i seguenti valori:

{3, 5, 1} e $a = 2$.

$$\sum_{i=1}^{3} a \cdot X_i = a \cdot X_1 + a \cdot X_2 + a \cdot X_3$$

$$= (2 \times 3) + (2 \times 5) + (2 \times 1)$$

$$= 2(3 + 5 + 1) = 18$$

Regola 3

Se dobbiamo eseguire un'operazione algebrica (quadrato, radice, logaritmo, ecc.) sulle singole osservazioni che devono essere sommate, questa operazione deve essere eseguita *prima di sommare* le *N* osservazioni.

Esempio

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_N^2$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \neq \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right)^2, \qquad \sum_{i=1}^{N} \sqrt{X_i} \neq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} X_i}$$

Regola 3

La regola precedente è specialmente importante quando abbiamo un doppio segno di sommatoria. L'espressione

$$\sum_{j=1}^{J}\left(\sum_{i=1}^{N_j} X_{ij}\right)^2$$

significa che dobbiamo prima fare la sommatoria all'interno dei *J* gruppi, dopo innalzare al quadrato, e poi sommare per tutti i gruppi.

Regola 4

Se la sola operazione che deve essere eseguita sulle osservazioni prima della sommatoria è essa stessa una somma (o sottrazione), allora la sommatoria può essere distribuita:

$$\sum\left(X_i + Y_i\right) = \sum X_i + \sum Y_i$$

Regola 4

$$\sum (X_i - Y_i) = \sum X_i - \sum Y_i$$

Esempio

$$\sum \left(X_i^2 - 3X_i + 10 \right)$$

$$= \sum X_i^2 - \sum 3X_i + \sum 10$$

$$= \sum X_i^2 - 3\sum X_i + N \cdot 10$$

Regola 5

Se ciascuna osservazione ha due punteggi, X_i e Y_i, allora

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \ldots + X_N Y_N$$

Regola 5

In altre parole, il prodotto tra i punteggi appaiati deve essere eseguito prima e la sommatoria dopo. Quindi

$$\sum_{i=1}^{N} X_i Y_i \neq \left(\sum X_i\right)\left(\sum Y_i\right)$$

Regola 6

$$\sum_{i=1}^{N} aX_i Y_i = a \sum_{i=1}^{N} X_i Y_i$$

Regola 7

$$\sum_{i=1}^{N}(aX_i + bY_i) = a\sum_{i=1}^{N} X_i + b\sum_{i=1}^{N} Y_i$$

Esempio: media aritmetica

La media aritmetica è definita come:

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{X_i}{N}$$

Esempio: media aritmetica

$$\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \overline{X}\right) = 0$$

$$= \sum X_i - \sum \overline{X} = \sum X_i - n\overline{X}$$

$$= N\overline{X} - N\overline{X} = 0$$

Esercizio 5.1

Scrivete in forma estesa le somme rappresentate dalle seguenti espressioni:

$$\sum_{i=1}^{4} X_i$$

$$\sum_{i=1}^{3} 4\left(\sum_{j=1}^{2} X_{ij}\right)$$

Esercizio 5.2

Esprimete le seguenti somme con la notazione appropriata:

$$\left(X_1 + X_2 + X_3 + X_4\right) / N$$

$$\left(3X_1 + 3X_2 + 3X_3 + 3X_4\right)\left(5X_1 + 5X_2 + 5X_3 + 5X_4\right)$$

$$\left(X_1 + X_2 + X_3 + X_4\right)^2 \left(Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2\right)$$

Esercizio 5.3

Riducete l'espressione seguente nella sua forma più semplice:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \left(\sum_{i=1}^{N} X_i / N\right)\right)$$